SOLUŢII ŞI BAREMURI

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A VII-a

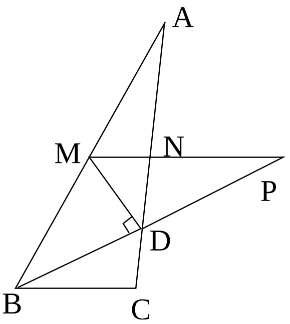
Subiectul 1.

$S_a = a^{2005} + (10+a)^{2005} + (20+a)^{2005} + \cdots + (90+a)^{2005}$ ..... 3 puncte

$S_a =$ multiplu de $10 + 10 \cdot a^{2005}$ ..... 3 puncte

implică S_a multiplu de 10 ..... 1 punct

Subiectul 2.



Fie $MN || BC$, $N \in AC$, $MN \cap BD = \{P\}$. ..... 1 punct

Triunghiul MBP este isoscel, dar $MD \perp BP$, deci $BD = DP$. 2 puncte

Triunghiurile NDP şi CDB sunt congruente (ULU), deci $ND = DC$, ceea ce implică $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{3}{1}$. ..... 1 punct

Din teorema bisectoarei avem $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ ..... 2 puncte

deci $AB = 3BC$ ..... 1 punct

Subiectul 3.

a) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = y - x$ implică $\sqrt{xy} = \frac{y-3x}{2}$ ..... 1 punct

Obţinem $9x^2 - 10xy + y^2 = 0$ sau $(9x-y)(x-y) = 0$ şi cum $x \neq y$ deducem $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$ ..... 2 puncte

b) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 40$ atrage $x + y + 2\sqrt{xy} = 80$ sau $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 80$ de unde $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\sqrt{5}$ ..... 1 punct

de unde $\sqrt{5x} + \sqrt{5y} = 20$. De aici $\sqrt{5y} = \frac{400+5y^2-5x}{40}$ ..... 1 punct

Din $\dfrac{400+5y^2-5x}{40} \in \mathbf{Q}$ rezultă $\sqrt{5y}$ natural adică $y = 5m^2, x = 5n^2$, $m, n \in \mathbf{N}$. . . . . 1 punct

Rezultă $m + n = 4$. Cum $n < m$ avem $n = 1, m = 3$ şi în fine $x = 5, y = 45$. . . . . 1 punct

Subiectul 4. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă că triunghiurile AOB, BOC şi AOC sunt isoscele. Dacă O este centrul cercului înscris triunghiului BCD atunci semidreptele $(CO$,$(DO$ şi $(BO$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului BCD . . . . 2 puncte

Unghiurile triunghiului ABC au măsurile $36°, 72°, 72°$ . . . . 2 puncte

Triunghiurile CAD şi BCA sunt asemenea . . . . 2 puncte

De aici rezultă $AC^2 = AD \cdot AB$ . . . . 1 punct